DESENHO GEOMÉTRICO

INSTRUCIONAIS DE MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO DA DISCIPLINA:

O seu sucesso na disciplina de desenho geométrico está inteiramente ligado ao conhecimento que você tiver de Geometria. Claro que você pode traçar a bissetriz de um ângulo, por exemplo, apenas seguindo os passos recomendados pelas técnicas do desenho, no entanto, seu conhecimento sobre o que seja bissetriz, e, de quais relações seus pontos têm com os lados do ângulo, certamente vão garantir que você compreenda melhor o processo desenvolvido pelo desenho no traçado dessa bissetriz.

Recomendamos, portanto, que você, paralelamente, procure conhecer os conceitos e as relações entre elementos envolvidos numa construção geométrica.

Apresentaremos aqui alguns conceitos que justifiquem as construções que faremos, no entanto, admitiremos que você já conhece alguns desses conceitos e, não descartamos a hipótese de você precisar buscar em outras fontes, material para seus estudos. A pesquisa é uma característica forte na EAD e contamos com a sua dedicação.

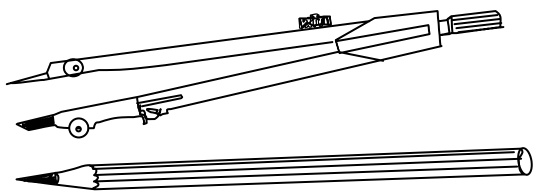
Esperamos que este material seja útil no desenvolvimento de seus trabalhos e no seu aprendizado.

UNIDADE I

I – MATERIAL

Para a disciplina de desenho vamos precisar de material específico. Uma boa lapiseira ou lápis macio, um par de esquadros, um compasso, um transferidor, uma borracha macia para desenho, uma régua graduada e um bloco A4 para desenho. Você pode optar por folhas avulsas (tamanho ofício).

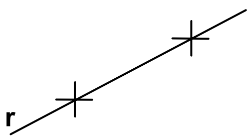
É aconselhável ter atenção quanto às pontas do lápis e compasso. Enquanto a ponta do lápis deve ser fina o suficiente para que o traço permita identificar um ponto definido pela interseção de duas traçadas linhas, a ponta do compasso deve ser feita com um lixa, pelo lado de fora do compasso, para ser mais confortável, e preciso, medir o tamanho do raio da circunferência que se deseja traça, como mostramos na figura abaixo.



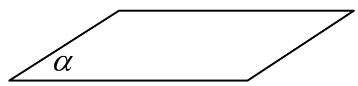
II – ENTES PRIMITIVOS.

Alguns conceitos da Geometria são primitivos, isso quer dizer, que não possuem definição, como é o caso de ponto, reta e plano. Não é necessário definir esses elementos, até porque é impossível, no entanto, precisamos conhecer o acordo que assumiremos aqui, quanto à suas representações.

PONTO: Representado pelo encontro de duas linhas, designaremos por uma letra maiúscula.



RETA: Designado por letra minúscula, uma reta fica definida quando conhecemos dois de seus pontos.



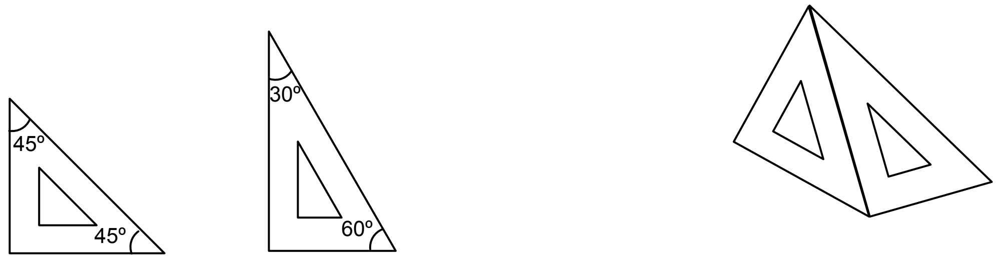
PLANO: Designado por letra grega, um plano pode ser associado à superfície de uma mesa, só que ele é infinito.

A preocupação com a construção de uma figura sempre fez parte da evolução da geometria e teve papel fundamental no desenvolvimento da escrita e linguagem do homem. Os gregos associavam a existência de uma figura à possibilidade de construir essa figura e para Euclides, todas as figuras seriam construídas com reta e círculo, e, durante boa parte do século do século IV a.C as operações eram realizadas usando o compasso e a régua (sem graduação).

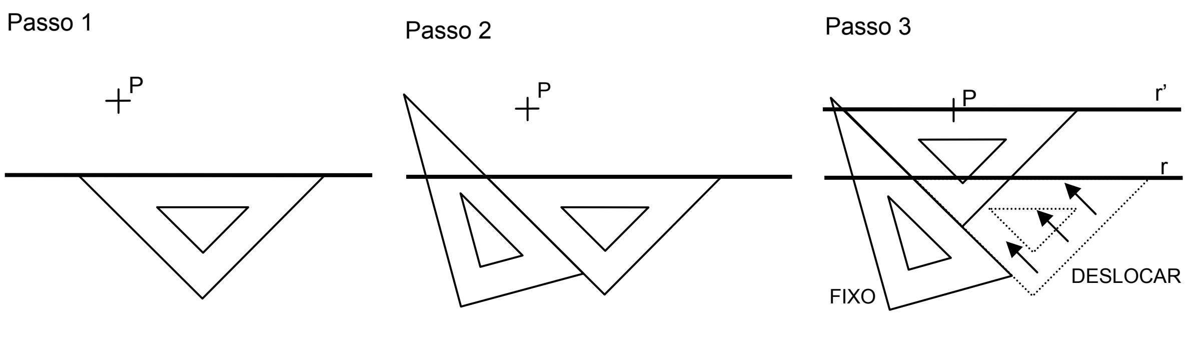
Embora o traçado de paralelas e de perpendiculares possa ser feito com o compasso é importante que você saiba trabalhar com o par de esquadros.

Cada um desses esquadros é, respectivamente, a metade do quadrado e do triângulo equilátero, portanto, seus ângulos são 45º ou 30º e 60º. Faremos referência a esses ângulos para designar qual esquadro usamos.

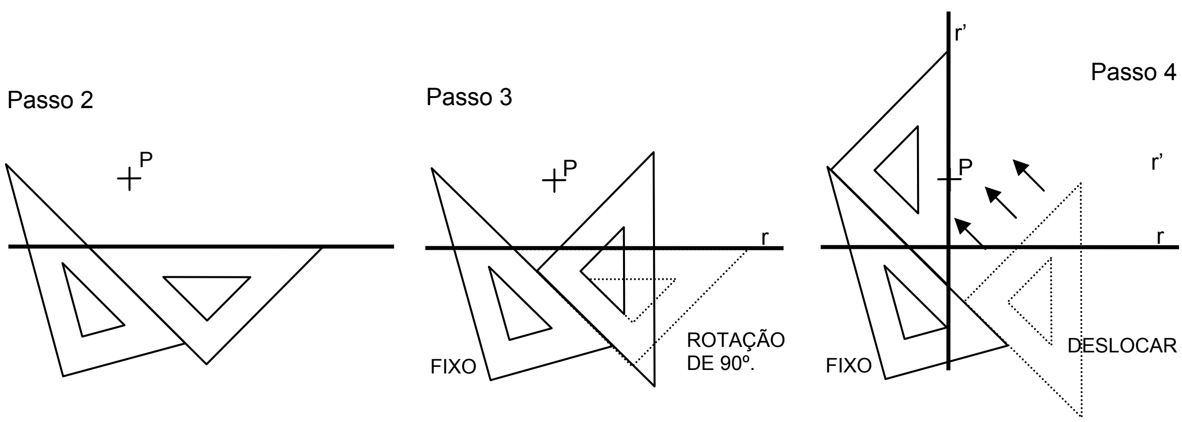
Verificamos se o par está correto fazendo coincidir a hipotenusa do 45º com o maior cateto do esquadro de 30º.



Consideremos um ponto P e uma reta r. Iniciamos fazendo coincidir a hipotenusa do esquadro de 45º, sobre a reta. A seguir, usamos o segundo esquadro, o de e 30º e 60º, para apoiar um dos catetos do primeiro esquadro para que esse possa deslizar sobre ele. Deslocamos então o segundo esquadro até que a hipotenusa passe pelo ponto P.



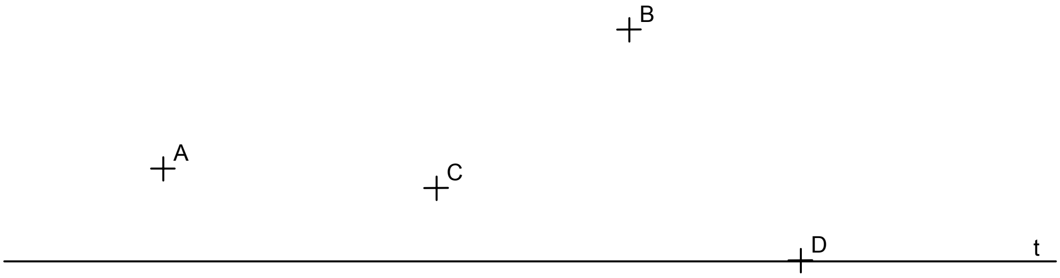
Uma reta perpendicular a r pode ser traçada fazendo uma rotação do primeiro esquadro, antes de deslizá-lo sobre o segundo (fixo).



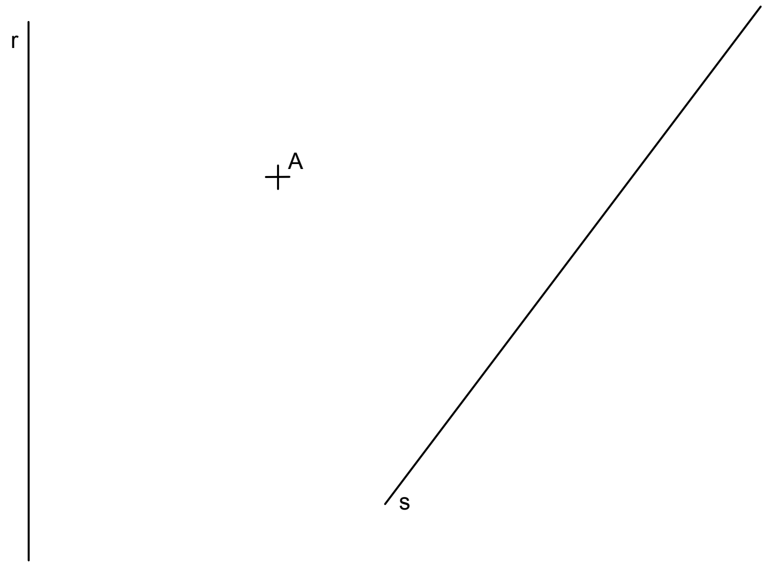
EXERCÍCIOS:

Seria recomendado que você praticasse, portanto:

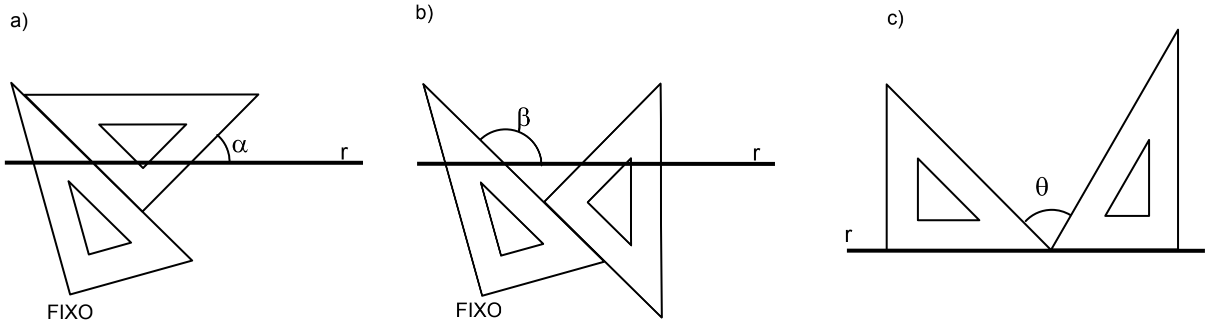
01. Construa, em relação à reta t, paralelas por A e B e, perpendiculares por C e D.



02. Pelo ponto A, construa uma reta paralela a reta r e uma outra reta perpendicular a reta s.



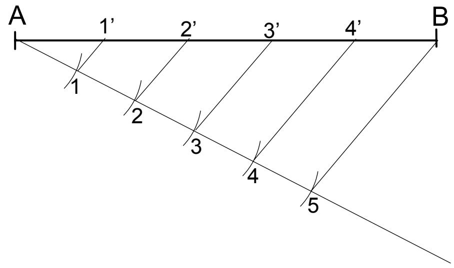
03. As figuras seguintes são construídas por diferentes posições do par de esquadros. Quais são as medidas dos ângulos α, β e θ?



III – DIVISÃO DE UM SEGMENTO

Dado um segmento qualquer, é possível dividi-lo em quantas partes desejarmos e na razão que desejarmos. Os processos de divisão de um segmento estão fundamentados no Teorema de Tales: “Um feixe de paralelas divide duas transversais em segmentos proporcionais”.

a) Seja dividir o segmento AB em 5 partes iguais.

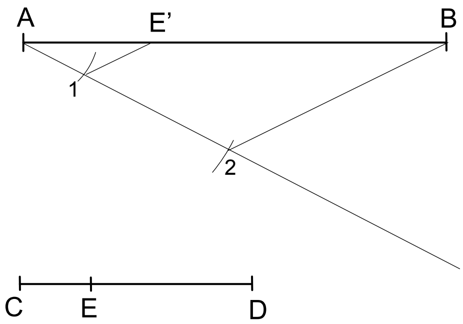


Pelo ponto A traçamos um segmento com qualquer inclinação e maior do que AB.
Sobre este segmento, a partir do ponto A marcamos 5 segmentos consecutivos, de mesmo tamanho definindo os pontos 1, 2, 3, 4 e 5.

Traçamos o segmento 5B e por cada um dos pontos, uma reta paralela. Os pontos 1’, 2’, 3’, 4’, e 5’ dividem o segmento AB em cinco segmentos iguais.

b) Dividir um segmento em partes proporcionais a dois segmentos dados ou dividi-lo da mesma forma que outro segmento fora dividido.

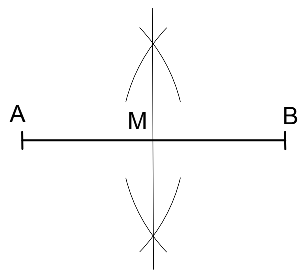
Ou seja, dividir o segmento AB em dois segmentos proporcionais aos segmentos CE e ED.



Traçamos pelo ponto A um segmento com qualquer inclinação e maior que CD e transportamos o segmento CD para este segmento, determinando os pontos 1 e 2.

Ligamos o ponto 2 ao ponto B e construímos uma paralela a 2B pelo ponto 1.
O ponto E’ divide o segmento AB na mesma razão que E divide CD.

A divisão de um segmento AB em dois segmentos iguais também pode ser obtida construindo dois arcos de mesmo raio pelos pontos A e B. As interseções desses arcos definem a reta que passa pelo seu ponto médio (M).



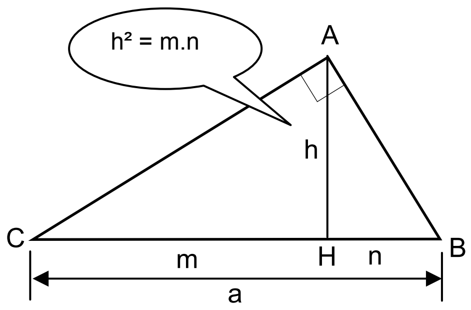
IV – RAIZ QUADRADA DE UM SEGMENTO

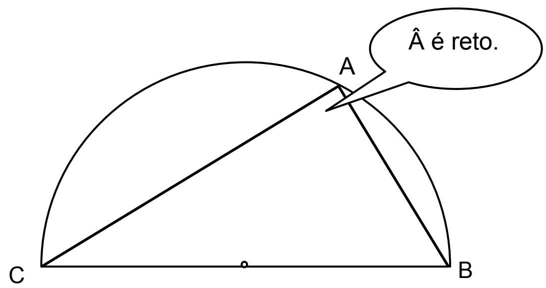
Dado um segmento qualquer, é possível extrair a raiz quadrada desse segmento, isto é, construir um segmento cuja medida seja a raiz quadrada da medida desse segmento. Os gregos já conheciam esse processo desde no século V a.C. e isso sugere que as relações do triângulo retângulo são herança desses povos.

O processo de extração da raiz quadrada de um segmento está fundamentado em dois teoremas da geometria Euclidiana:

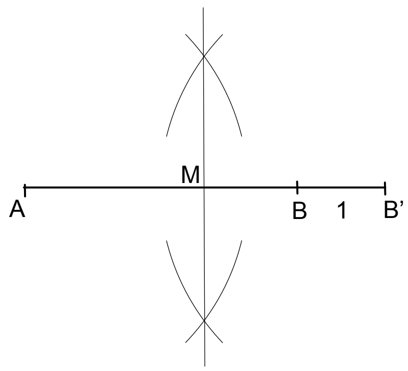
1) A altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, é a média geométrica entre as projeções dos catetos e;

2) Todo triângulo inscrito num semi-círculo é retângulo.





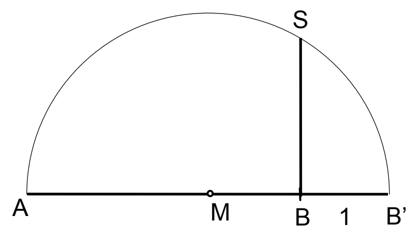
Seja construir o segmento que representa a raiz quadrada do segmento AB representado abaixo.



Dado o segmento AB, prolongamos este segmento de uma unidade até o ponto B'.

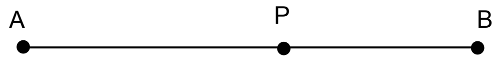
Determinamos então, o ponto médio do segmento AB' e, com centro nesse ponto médio (M), construímos um semi-círculo de diâmetro AB'. A perpendicular levantada pelo ponto B em relação ao segmento AB, representada aqui pelo segmento BS, é a raiz quadrada do segmento AB.

Observe que este segmento seria a altura do triângulo retângulo SAB', inscrito ao semi-círculo de diâmetro AB'.



VII - DIVISÃO NA MÉDIA E EXTREMA RAZÃO ou DIVISÃO ÁUREA

Diz-se que um ponto P divide um segmento AB em média e extrema razão, se a razão do segmento todo para o segmento maior AP é igual à razão deste segmento AP para o segmento PB, isto é:



$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

A divisão de um segmento em média e extrema razão, deu origem a um número conhecido por "Número de ouro". Representado pela letra grega ϕ (Phi) este número sempre foi tratado como um número ligado a beleza.

Diz-se que, de todas as divisões possíveis de um segmento, a divisão na MÉDIA E EXTREMA RAZÃO parece ser a mais agradável aos nossos olhos. Esta divisão seria um modelo harmonioso para os nossos sentidos.

Documentado no Papiro de Rhind, os Egípcios faziam referências a uma "razão sagrada" que se crê ser a razão áurea, como é chamada a razão que dá o número de ouro.

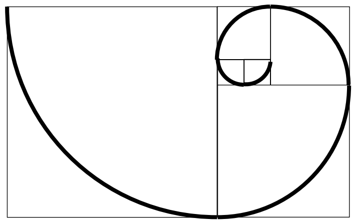
A busca por razões que justificassem a participação do número phi no modelo da beleza, levou o matemático alemão Zeizing a formulou, em 1855, o seguinte princípio:

> *"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo."*
>
> *Zeizing - 1855*

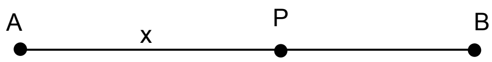
As pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea: A razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. Esta razão ou secção áurea surge ainda em muitas outras construções da antiguidade, como o Parthenon, construído em Athenas por volta dos anos 430 - 440 a.C.

A divisão áurea aparece ainda na Música, na Poesia, na Pintura e até na Lógica. A secção áurea também regula a espiral que aparece na natureza, presente na margarida, no girassol e na concha de um molusco (náutilo). Essa espiral que fornece o padrão matemático para o princípio biológico que regula o crescimento da concha e está presente na distribuição de pétalas de diversas flores, foi utilizada pelo matemático italiano Fibonacci (1180-1250) para calcular o crescimento das populações de coelhos a partir de um casal.

Uma seqüência de quadrados com lados de medidas iguais aos números da seqüência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...) formará esta espiral. Dividindo cada um desses números por seus antecessores, temos a seqüência de frações $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$... que se aproxima do número de ouro ϕ = 1,618034...



Determinar o valor do número de ouro equivale a resolver uma equação do 2º grau. Seja P um ponto que divida AB = ℓ em média e extrema razão. Chamemos x o segmento AP.



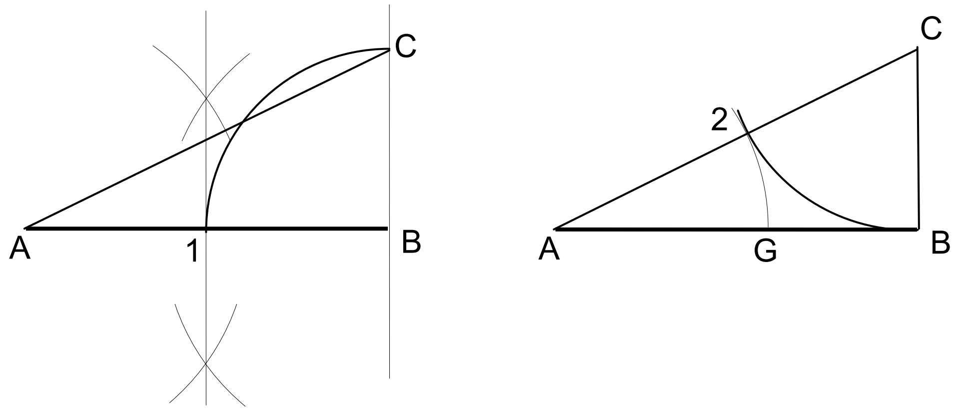
Então,

$$\frac{\ell}{x} = \frac{x}{\ell - x} \rightarrow x^2 = \ell 2 - \ell x \rightarrow x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

Desta equação obtém-se que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. x, e daí tem-se que $\frac{AB}{AP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o número irracional ϕ = 1,0610834.. conhecido como "número de ouro".

Dado um segmento AB, construímos pela extremidade B uma perpendicular (você pode construir essa perpendicular usando o par de esquadros ou, posteriormente, qualquer um dos processos que veremos a seguir); sobre esta perpendicular construímos um segmento BC igual à metade do segmento AB. Lembre-se que o ponto médio de AB (1) pode ser conseguido pela construção da mediatriz.

Agora, com centro no ponto C construímos um arco de círculo de raio BC que corta a hipotenusa AC no ponto 2. O arco de centro A e raio A2 determina sobre AB o segmento AG tal que $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$: AG é o segmento áureo do segmento AB.



OBSERVAÇÃO.

O retângulo construído com lados iguais a AB e AG é conhecido por “Retângulo áureo”. Chamamos de “Retângulo áureo” ou “Retângulo de ouro” o retângulo cuja razão entre suas medidas é o número de ouro.

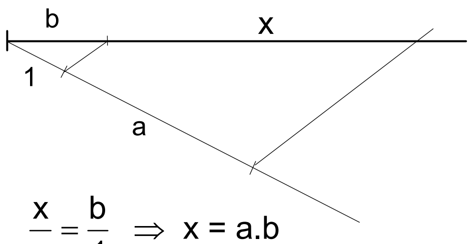
VIII – OPERAÇÕES COM SEGMENTOS

Dados dois segmentos quaisquer, algumas operações são possíveis de realizar com régua e compasso. É o caso da adição, subtração, multiplicação e divisão, além da radiciação que vimos anteriormente.

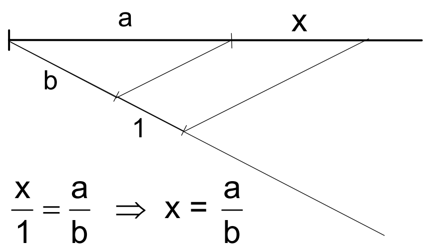
Consideremos os segmento de medidas a e b representados a seguir:

a) a soma (a + b) e a diferença (a – b) podem ser obtidas construindo sobre uma reta qualquer, os segmentos a e b com uma extremidade comum contíguos ou um segmento sobre o outro.

b) O produto a.b e a divisão $\frac{a}{b}$ podem ser obtidas usando recursos semelhantes ao que usamos para dividir um segmento. O teorema de Tales justifica essas construções.



$$\frac{x}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow x = a.b$$



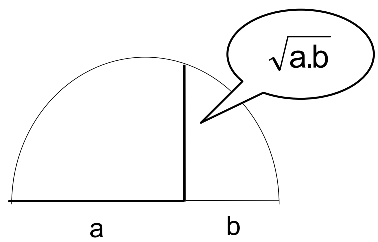
$$\frac{x}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{a}{b}$$

A partir desses processos podemos obter quaisquer expressões algébricas envolvendo os segmentos a e b como, por exemplo: a^2, $a\sqrt{b}$, $a + 3ab^2$. Exercite!

IX – MÉDIA GEOMÉTRICA entre a e b

A média geométrica entre os segmentos a e b pode ser construída fazendo a e b projeções dos catetos de um triângulo retângulo.

Construído o semi-círculo de diâmetro (a + b), o segmento perpendicular levantado pelo ponto comum aos segmentos a e b é a média geométrica dos dois.



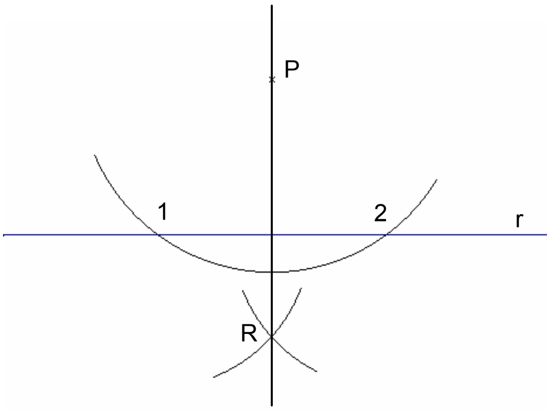
USANDO O COMPASSO.

Nos textos seguintes faremos referência à ponta seca do compasso como centro do círculo e a abertura do compasso, como determinante do raio.

X – TRAÇADO DE PERPENDICULARES.

Além do traçado com os esquadros, são muitos os processos para se construir uma perpendicular a uma reta, usando o compasso. Nos limitaremos a apresentar duas construções.

Traçar pelo ponto P uma perpendicular em relação a reta r.



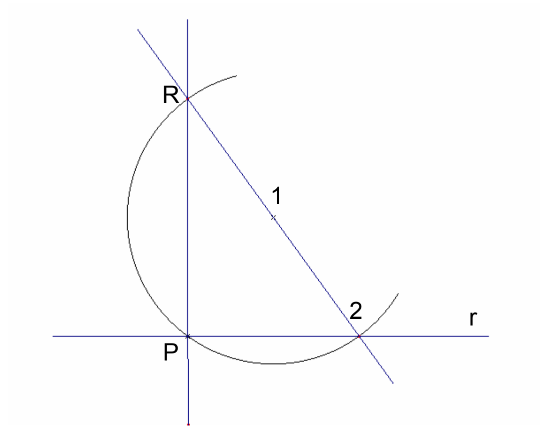
a) P não pertence a reta r.

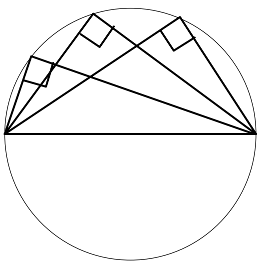
Traçamos, pelo ponto P, um arco que intercepta r em 1 e 2. Com a ponta seca em cada um desses pontos e com mesmo raio traçamos dois arcos. A interseção desses arcos é ponto R que define a perpendicular PR.

b) P pertence a reta r

Com a ponta seca num ponto qualquer (1) fora da reta traçamos um círculo passando por P, que corta a reta em 2. A interseção da reta 12 com o círculo, determina o ponto R que define a perpendicular PR.

Observe que esse processo pode ser utilizado quando o ponto P for extremidade de um segmento.





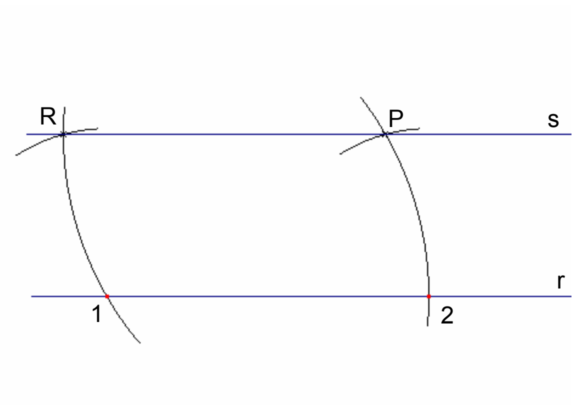
Esse último processo é fundamentado no teorema sobre o triângulo retângulo que usamos anteriormente: “Todo triângulo inscrito num círculo é retângulo se, e somente se, um dos lados é diâmetro”.

Buscávamos o triângulo retângulo RP2.

XI – TRAÇADO DE PARALELA.

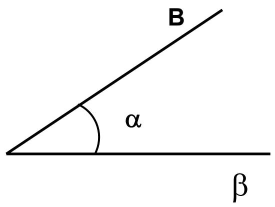
Traçar pelo ponto P uma reta paralela à reta r.

Com centro em P, raio qualquer, traça-se o arco que cruza a reta em r. Com a mesma abertura, centrado em 1 e raio 1P, traça-se o arco que vai cruzar a reta no ponto 2.



Transporta-se, então, a medida do arco 2P a partir de 1, sobre o segundo arco traçado, obtendo-se o ponto R que define a paralela PR.

ÂNGULO



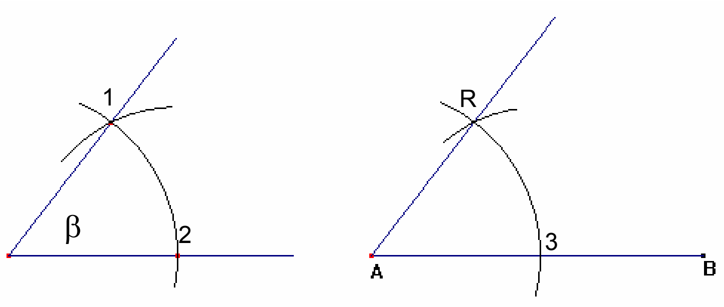
Região plana limitada por duas semi-retas de mesma origem, um ângulo, como no exemplo ao lado, pode ser denotado por AÔB = BÔA, pelo seu vértice Ô ou simplesmente por uma letra grega (α).

No exemplo: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semi-retas e o ponto O, origem comum às semi-retas, é o vértice do ângulo.

XII – TRANSPORTE DE ÂNGULOS

Transportar um ângulo significa construir um ângulo congruente a outro, utilizando-se o compasso.

Transportar o ângulo β para o segmento AB .



Com centro no vértice do ângulo construímos um arco com qualquer raio cortando os dois lados do ângulo nos pontos 1 e 2.

Com a ponta seca no ponto A, traçamos um arco, com mesmo raio, que corta AB em 3. Agora, basta transportar a medida 12 para o ponto 3 determinando o ponto R, sobre o arco que se tinha construído anteriormente, definindo, portanto o lado AR do ângulo.

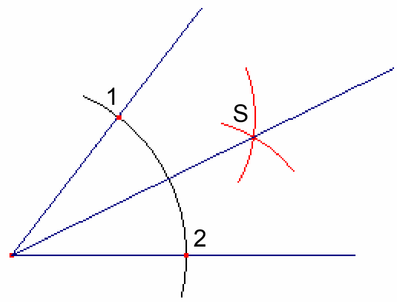
XIII – BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

Podemos construir um ângulo lançando mão do transferidor. No entanto, a construção pode ser realizada, com uso da régua e do compasso, a partir do conhecimento que você tenha de geometria: 45º é a metade do reto, 30º e 60º podem ser obtidos a partir do triângulo equilátero e, outros ângulos, podem ser construídos pela combinação desses ângulos.

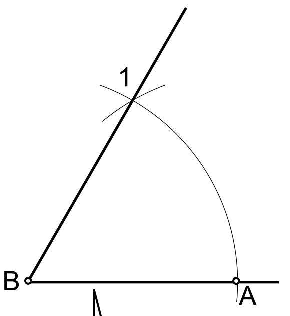
Nesse caso, convém que saibamos traçar a bissetriz de um ângulo: semi-reta que divide o ângulo ao meio.

Dado um ângulo qualquer, construímos pelo seu vértice um arco, com raio qualquer, cortando seus lados nos pontos 1 e 2.

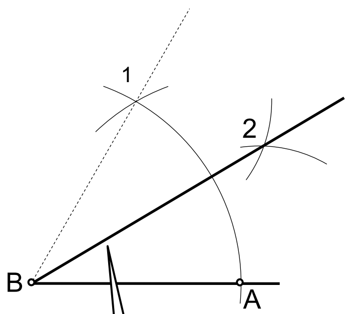
Com centros nesses pontos, com qualquer raio, e com raios iguais, traçamos dois arcos no interior do ângulo. A interseção desses arcos é um ponto da bissetriz.



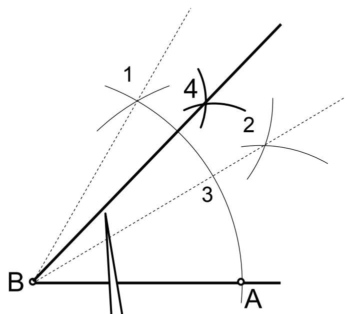
EXEMPLOS: Ainda que você possa usar o par de esquadros além do transferidor, mostraremos como construir os ângulos de 30º, 45º, 60º e 90º com o compasso.



O triângulo AB1 é equilátero.

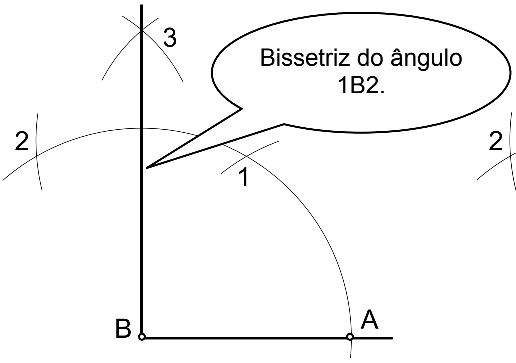


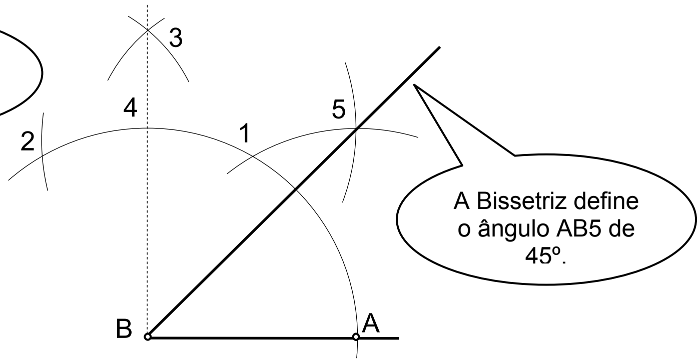
A bissetriz define o ângulo AB2 de 30º.



A bissetriz de 1B3 define o ângulo AB4 de 45º.

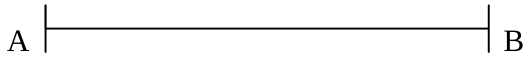
O ângulo reto e o ângulo de 45º ainda podem ser construídos como a seguir:



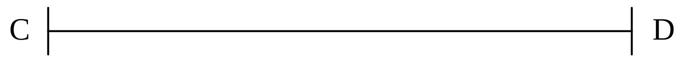


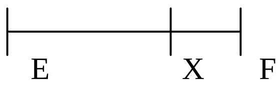
EXERCÍCIOS:

1) Divida o segmento AB em 3 partes iguais.



2) Divida o segmento CD da mesma forma que EF fora dividido.





3) Dados os segmentos AB , CD , EF, determine graficamente as expressões pedidas:

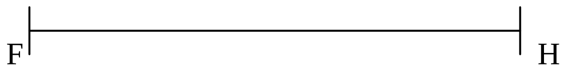
a) AB + CD

b) EF – AB

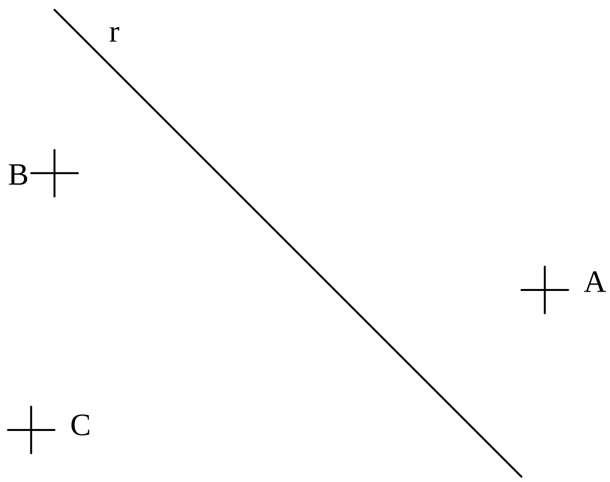
c) $\frac{EF}{2}$ + AB – 2CD

d) $\dfrac{\sqrt{EF} + \sqrt{AB \cdot CD}}{2}$

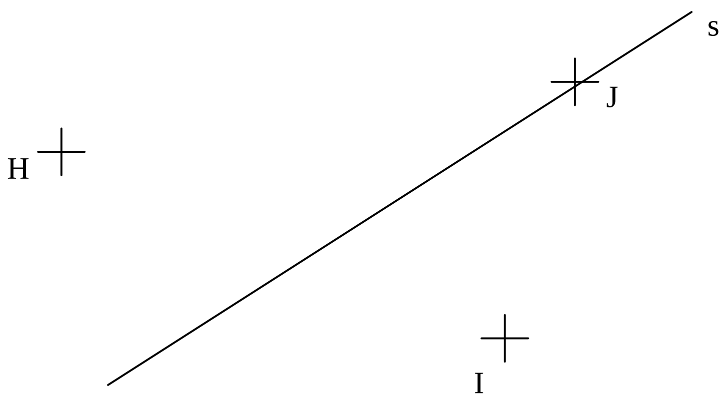
4) Sabendo que MN é áureo do segmento FH, construa o retângulo de ouro que tenha como medidas MN e FH.



5) Desenhar retas paralelas à reta r pelos pontos A, B e C.

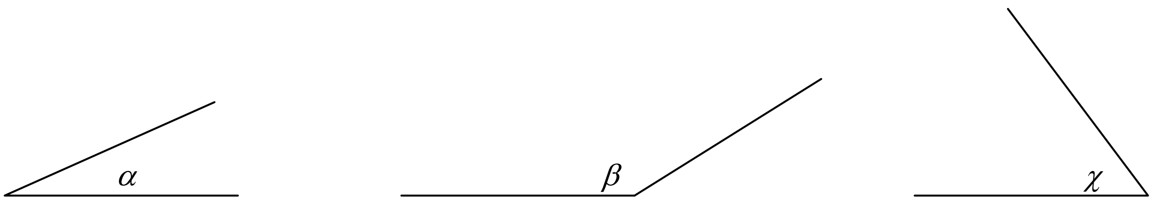


6) Construir perpendiculares à reta s passando pelos pontos H, I e J.



7) Usando régua e compasso, trace a reta t paralela à reta u pelo ponto A.

8) Determine graficamente as operações com os ângulos dados:



a) $\alpha + \beta$

b) $\beta - \chi$

c) $3\alpha - \dfrac{\chi}{2}$

d) $\dfrac{2\alpha + \beta - \chi}{4}$

UNIDADE II

I – LUGAR GEOMÉTRICO

No campo bidimensional da Geometria Plana a posição de um ponto fica precisamente determinada quando lhe são impostas duas condições independentes.

O atendimento a apenas uma das condições deixa indeterminado o ponto: ele pode ocupar uma série de posições, as quais constituem uma certa figura. Esta figura é denominada *Lugar Geométrico*.

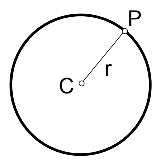
Assim, um *lugar geométrico* é a figura formada por todos os pontos que obedecem a uma determinada condição exclusiva deles.

Quando a resolução de um problema gráfico depende diretamente da obtenção de um ponto sujeito a duas condições conhecidas, o método geral de resolução consiste em pesquisar os dois lugares geométricos correspondentes a cada uma as condições, construí-los e determinar sua interseção, que serão ponto procurado.

Naturalmente, cabe sempre discutir o problema, isto é, verificar em que condições há, ou não, ponto comum aos dois lugares geométricos. E mais, se há possibilidade de mais de um ponto comum.

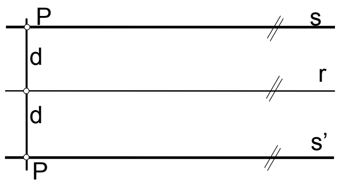
Uma mesma condição pode representar diferentes objetos, dependendo do espaço onde esteja sendo colocada. Os Lugares geométricos definidos a seguir têm o plano como universo.

LG_1 – Lugar geométrico dos pontos P situados a uma distância r de um ponto fixo C.



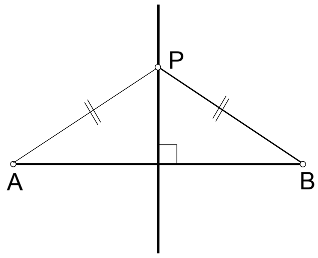
CÍRCULO DE CENTRO C E RAIO R.

LG_2 – Lugar geométrico dos pontos P situados a uma distância d de uma reta r.



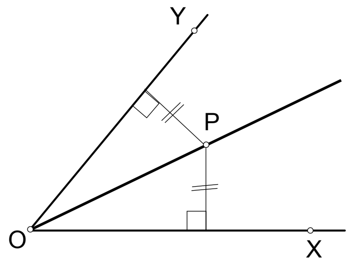
PAR DE PARALELAS.

LG$_3$ – Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de dois pontos fixos A e B.



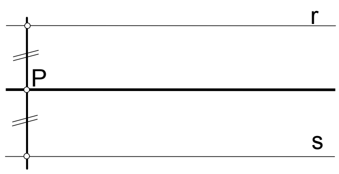
MEDIATRIZ DO SEGMENTO AB

LG$_4$ – Lugar geométrico dos pontos P interiores a um ângulo dado XÔY e eqüidistantes de seus lados.



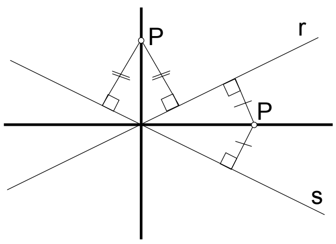
BISSETRIZ DO ÂNGULO XÔY.

LG$_5$ – Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de duas retas paralelas r e s.



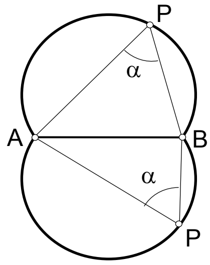
RETA EQUIDISTANTE DE r e s.

LG$_6$ – Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de duas retas concorrentes r e s.



PAR DE BISSETRIZES DOS ÂNGULOS FORMADOS

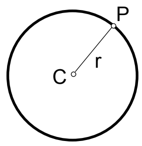
LG$_7$ – Lugar geométrico dos pontos P dos quais se vê um segmento dado AB sob um ângulo dado α.



PAR DE ARCOS CAPAZES DO ÂNGULO α

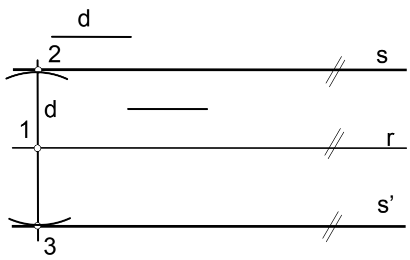
II – CONSTRUÇÃO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

LG_1: Lugar geométrico dos pontos P situados a uma distância r de um ponto fixo C.



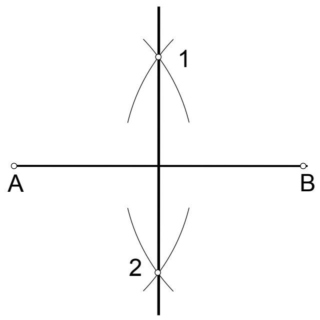
Dado o ponto C e o segmento r, com ponta seca em C e a abertura igual a r traçamos o círculo.

LG_2: Lugar geométrico dos pontos P situados a uma distância d de uma reta r.



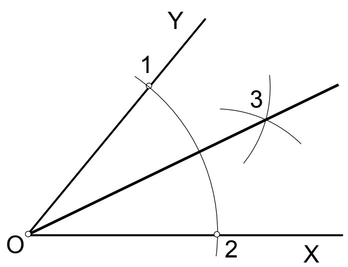
Dados r e d , traçamos uma perpendicular em relação à r por qualquer ponto (1). Com centro no ponto 1 construímos um arco de raio d determinando os pontos 2 e 3 . Por esses pontos traçamos as retas paralelas à r.

LG_3: Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de dois pontos fixos A e B.



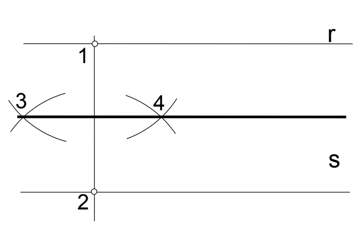
Dado o segmento AB, construindo dois arcos de mesmo raio pelos pontos A e B. As interseções desses arcos definem a mediatriz.

LG_4: Lugar geométrico dos pontos P interiores a um ângulo dado XÔY e eqüidistantes de seus lados.



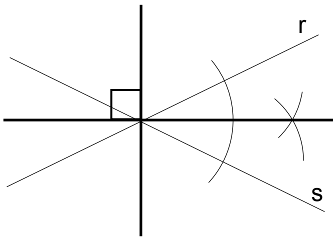
Dado o ângulo XÔY, construímos um arco com centro no vértice O que corta seus lados nos pontos 1 e 2. Com centros nestes dois pontos e com raios iguais traçamos dois arcos, cuja interseção, no interior do ângulo, define o ponto 3. Por este ponto passa a bissetriz.

LG_5 – Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de duas retas paralelas r e s.



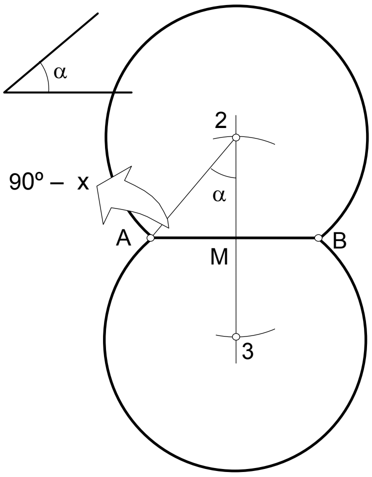
Dados as retas paralelas r e s, traçamos uma perpendicular cortando r e s nos pontos 1 e 2. Por estes pontos construímos arcos, com mesmos raios, que interceptam-se em 3 e 4 que definem a reta procurada.

LG_6 – Lugar geométrico dos pontos P eqüidistantes de duas retas concorrentes r e s.



Dados as retas r e s, concorrentes no ponto C, construímos a bissetriz de um dos ângulos e traçamos um perpendicular a essa bissetriz pelo ponto C.

LG_7 – Lugar geométrico dos pontos P dos quais se vê um segmento dado AB sob um ângulo dado α.

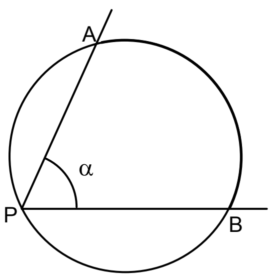


Dado o segmento AB e o ângulo α, construímos a mediatriz de AB que intercepta AB em M. Transportamos sobre o lado AB o complemento do ângulo α com vértice em A. A interseção da mediatriz com o lado do ângulo 90º – α (complemento de α), representado pelo ponto 2, é o centro do arco capaz. Um arco com centro em M e raio M2 determina o ponto 3, centro do outro arco capaz.

OBSERVAÇÃO: O arco capaz tem relação com o ângulo inscrito em uma circunferência.

Chamamos de ângulo inscrito, o ângulo formado por duas cordas consecutivas de uma circunferência. A medida de um ângulo inscrito é sempre igual à metade do arco determinado por seus lados.

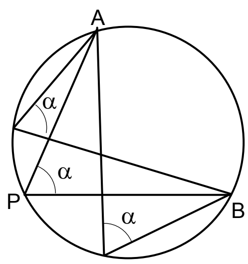
Consideremos o ângulo α na figura abaixo:



$$\alpha = \frac{\text{arco AB}}{2}$$

Assim, todo ângulo inscrito que possui o vértice sobre o arco APB terá medida igual a α. Dizemos então que o arco APB é o arco capaz do ângulo α.

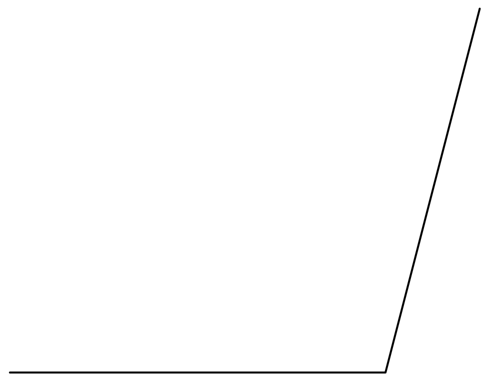
Observe que o segmento AB será observado do ponto P sob o ângulo α.



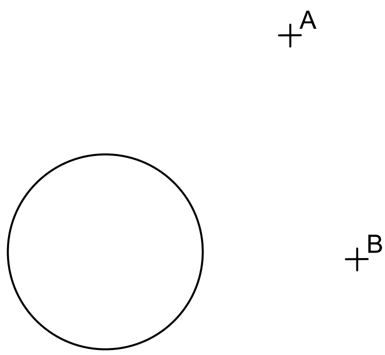
Essa mesma propriedade, a do ângulo inscrito ser metade do arco compreendido por seus lados, justifica a afirmação de que “todo triângulo inscrito num semi-círculo é um triângulo retângulo e tem o diâmetro como hipotenusa”.

EXERCÍCIOS

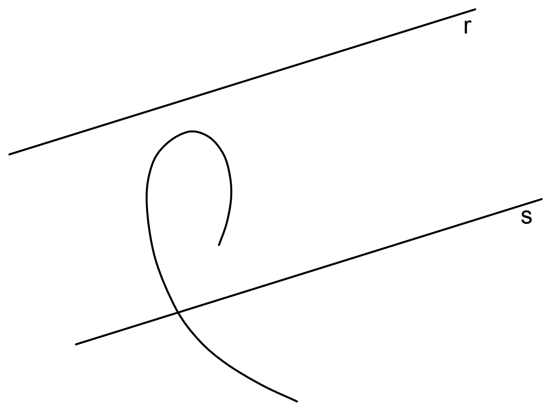
01. Divida o ângulo seguinte em quatro ângulos congruentes.



02. Determinar, sobre o círculo dado, um ponto P eqüidistante dos dois pontos dados A e B.

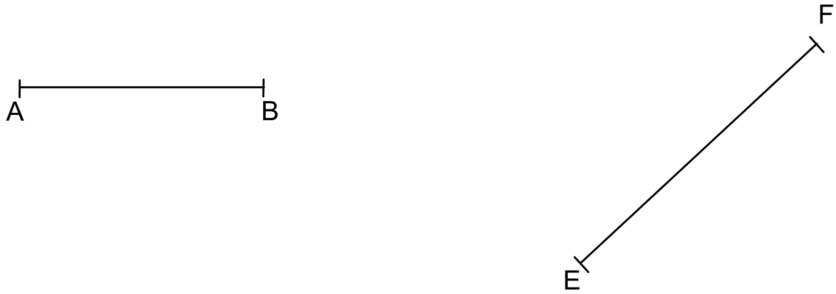


03. Determinar sobre a curva C o ponto X eqüidistante das retas r e s, paralelas.

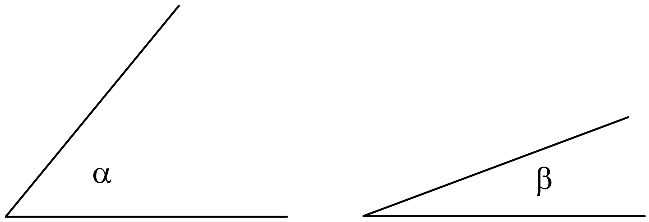


04. Construa um círculo de raio r que passe pelos pontos A e B.

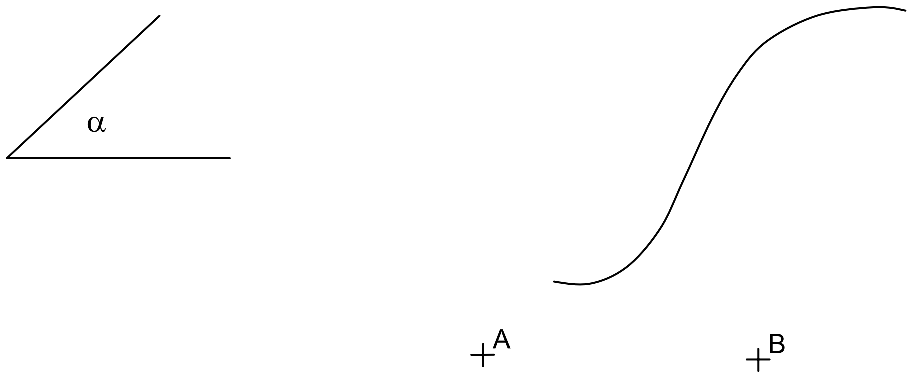
05. Determine os pontos médios dos segmentos AB e EF.



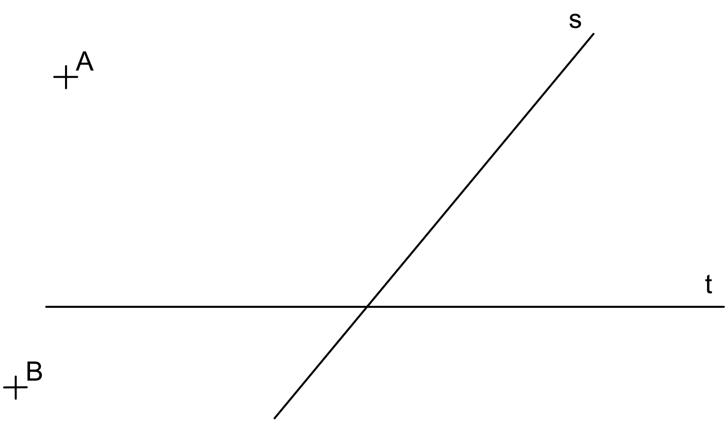
06. Dados os ângulos α e β, construa os ângulos $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$.



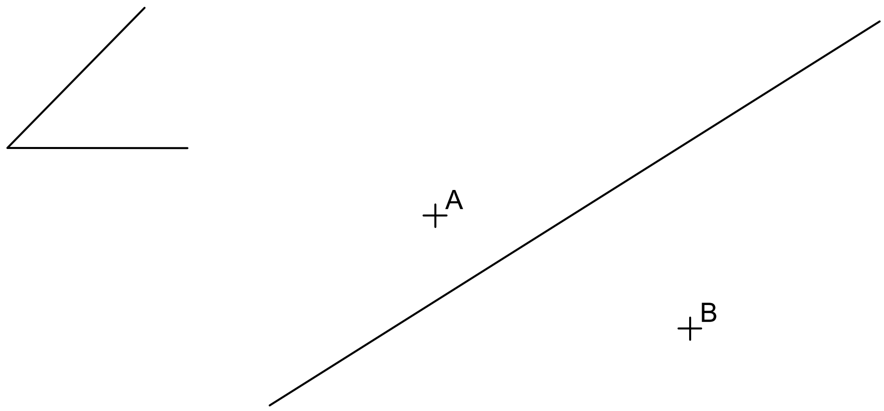
07. Determine sobre a curva C o ponto P tal que APB = α.



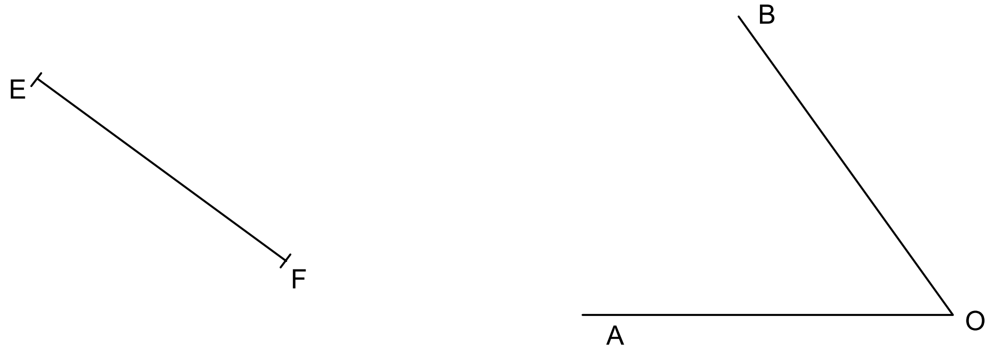
08. Determinar a posição do ponto P eqüidistante dos pontos A e B e eqüidistante das retas s e t.



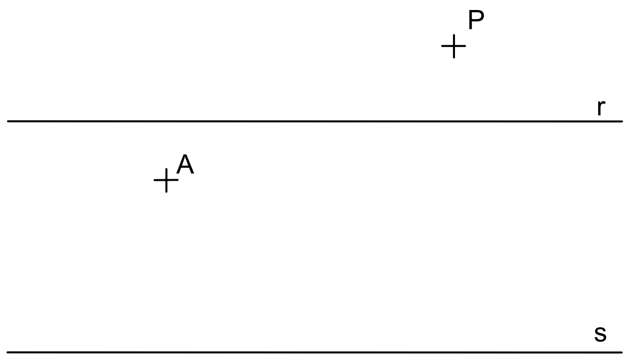
09. Obter um ponto P na reta r de tal modo que o ângulo APB seja 45º.



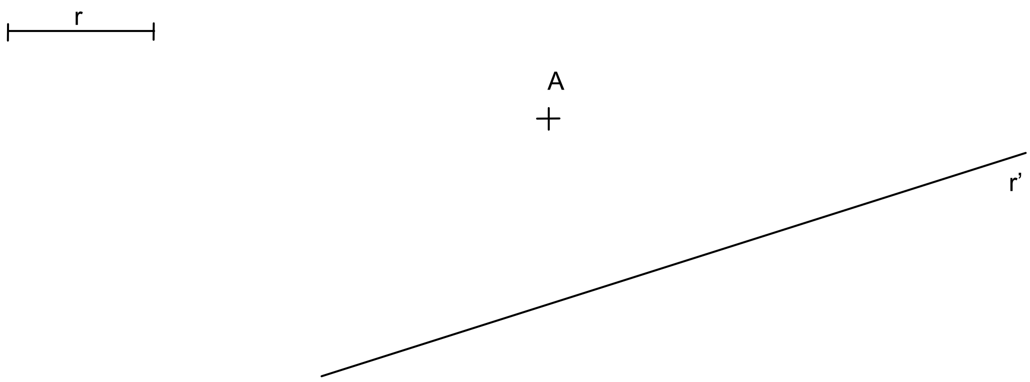
10. Trace a mediatriz do segmento EF e a bissetriz do ângulo AÔB.



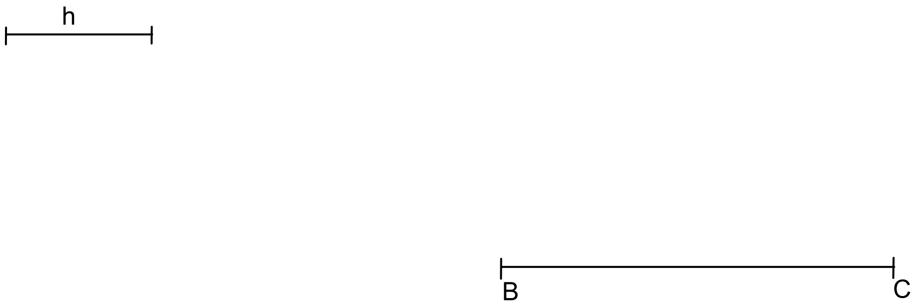
11. Dadas as retas paralelas r e s, construir um triângulo isósceles ABC, de base BC, sabendo-se que a reta suporte de BC passa por P e é tal que B $\in$ r e C $\in$ s.



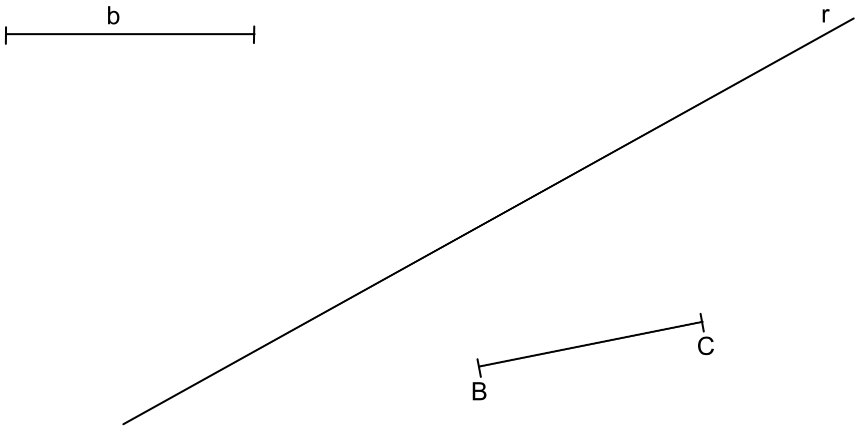
12. Construa um círculo de raio r tangente a reta r’ e que passe pelo ponto A.



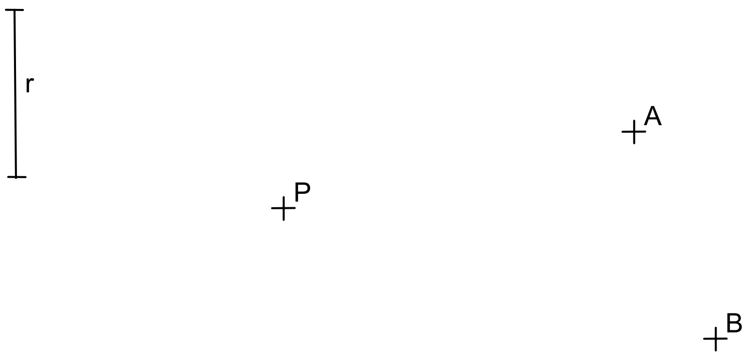
13. Construir o triângulo retângulo de hipotenusa BC cuja altura relativa à hipotenusa mede h.



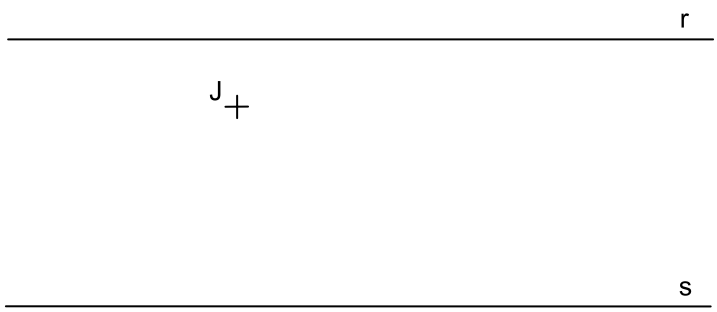
14. Construir um triângulo ABC do qual se conhece o lado BC, a reta r que contém o vértice A e o comprimento b do lado AC.



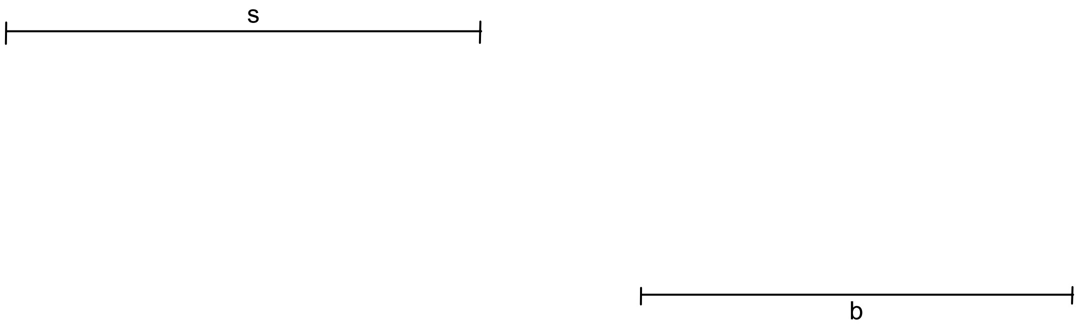
15. Construir um círculo de raio r que passa pelo ponto P, sabendo-se que seu centro eqüidista dos pontos A e B.



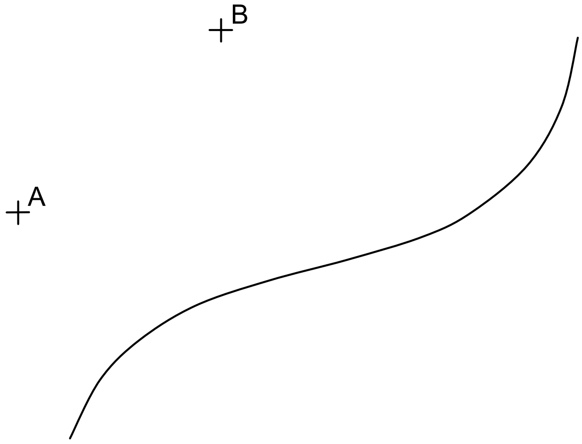
16. Localizar o ponto eqüidistante das retas paralelas r e s e do ponto J.



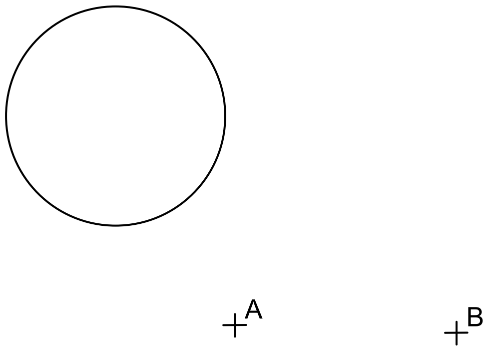
17. Construa o triângulo ABC conhecendo-se o ângulo Â = 45º, o lado AB e o segmento s = a + b.



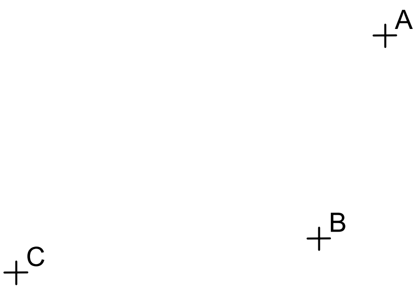
18. Obtenha um ponto da curva C tal que o ângulo APB seja de 60º.



19. Determinar sobre o círculo o ponto X tal que o ângulo AXB seja de 30º.



20. Construir o círculo que passa pelos pontos A, B e C. Isto equivale a construir o círculo circunscrito ao triângulo ABC.



UNIDADE III

CONSTRUÇÃO DE UM POLÍGONO REGULAR.

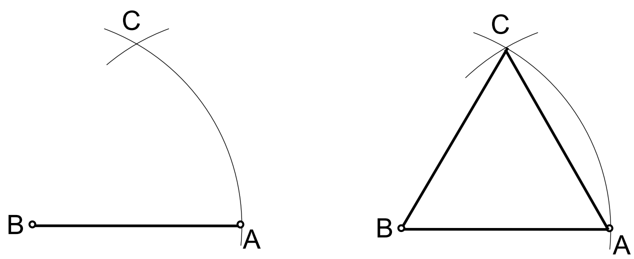
Você pode encontrar no livro Construções Geométricas, de Eduardo Wagner, a discussão de quais construções são possíveis usando régua e compasso escrita pelo professor José Paulo Carneiro.

A construção de polígonos regulares é possível com exatidão para alguns gêneros. Isso acontece para n = 3; 4; 5; 6; 8; 10, 12 e 15. Desde o século III a.C. o homem se ocupou com as construção de polígonos regulares usando apenas a régua e o compasso, mas, somente no século XVIII, foi possível concluir que nem todos os polígonos são construtíveis, isto é, nem todos podem ser construídos usando apenas régua e compasso.

Construído um polígono de gênero n fica fácil entender a possibilidade da construção de um polígono de gênero 2n. No entanto, a construção dos polígonos regulares "construtíveis" sugere um procedimento diferente para cada gênero.

I – TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Seja construir um triângulo equilátero de lado igual ao segmento AB.

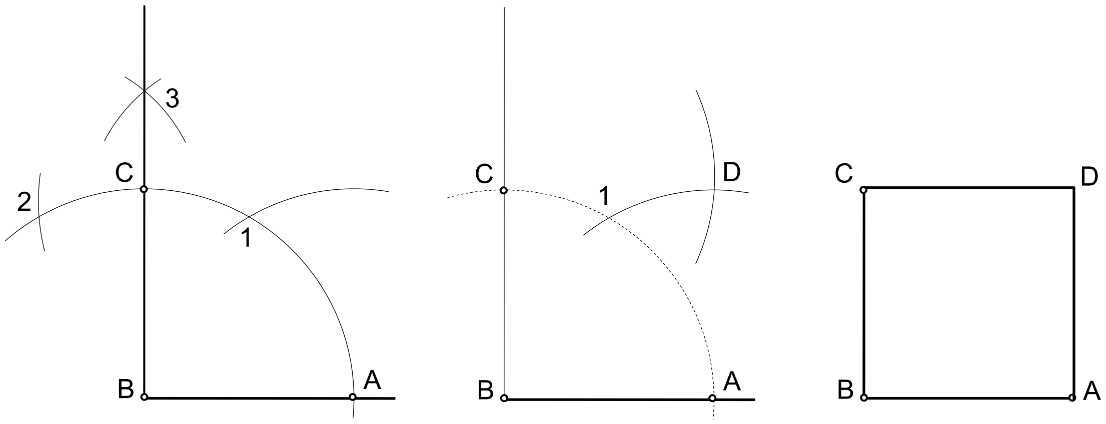


Dado o segmento AB, por cada um dos pontos A e B construímos arcos de círculos de raio AB. O encontro desses dois arcos define o vértice C do triângulo equilátero ABC.

II – QUADRADO

A construção do quadrado pode ser obtida com o uso dos esquadros, no entanto, supondo que essa construção possa facilmente ser deduzida por você, optamos por apresentar sua construção usando apenas o compasso e a régua (não graduada).

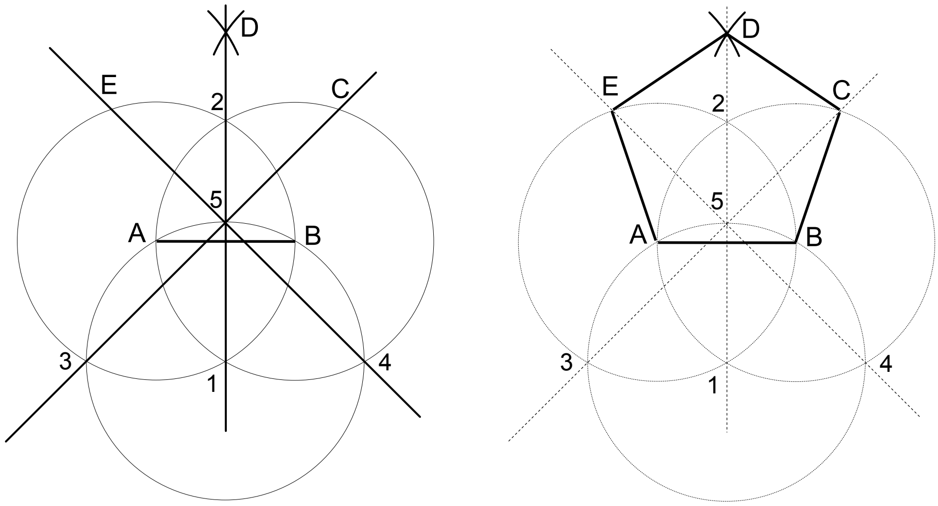
Para essa construção, imaginemos que seja dado o segmento AB que define o lado do quadrado. Pelo ponto B (ou A) construímos um ângulo reto, como vimos anteriormente. O vértice C será definido pelo encontro do arco A2 com a perpendicular B3. Pelo ponto e com raio BC, construímos um arco que intercepta o arco que passa pelo ponto 1, definindo com ele o vértice D do quadrado ABCD.



Observe que poderíamos, pelo ponto B, construir um arco cujo raio tem medida igual a do segmento AC, diagonal do quadrado ABCD. O encontro deste último com o arco que passa pelo ponto 1 define o vértice D.

III – PENTÁGONO REGULAR

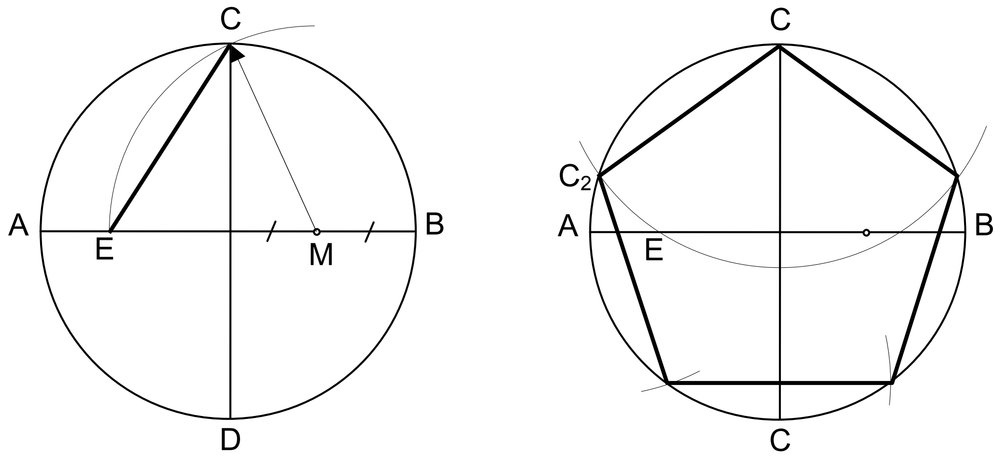
Dado o segmento AB, lado do pentágono, construímos círculos com centros nos pontos A e B e com raio igual a AB. Esses círculos definem os pontos 1 e 2 que pertencem a mediatriz do segmento AB. Agora, com centro no ponto 1 e mesmo raio AB traçamos uma última circunferência que corta essa mediatriz no ponto 5. Traçando as retas 45 e 35 determinamos os vértices E e C e, a partir desses pontos traçamos arcos de círculos de raio igual ao lado do pentágono; o vértice D é dado pelo encontro desses dois arcos.



OBSERVAÇÃO

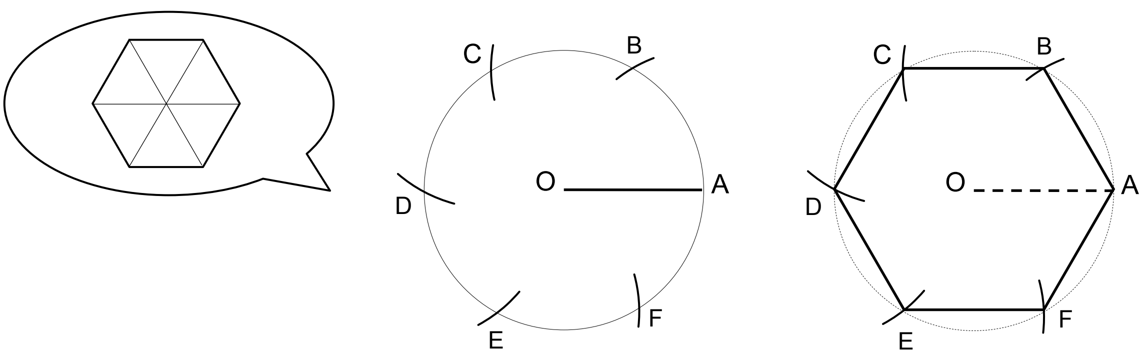
O lado do pentágono pode ser construído, ainda, usando o seguinte processo.

Dado uma circunferência traçam-se os diâmetros AB e CD perpendiculares. Com centro no ponto M, médio de OB, e raio MC descreve-se um arco que intercepta o raio AO em E. O segmento CE é o lado do pentágono.



IV – HEXÁGONO REGULAR

Se levarmos em conta que o Hexágono é composto de triângulos equiláteros fica fácil entender que o lado do hexágono é igual ao raio do círculo que o circunscreve. Portanto, dado o lado OB do hexágono, construímos um círculo de centro O e raio AO e, a partir do ponto A e nos pontos subseqüentes, construímos arcos de círculos de raio igual ao do círculo inicial. O hexágono regular será então inscrito a esse círculo.



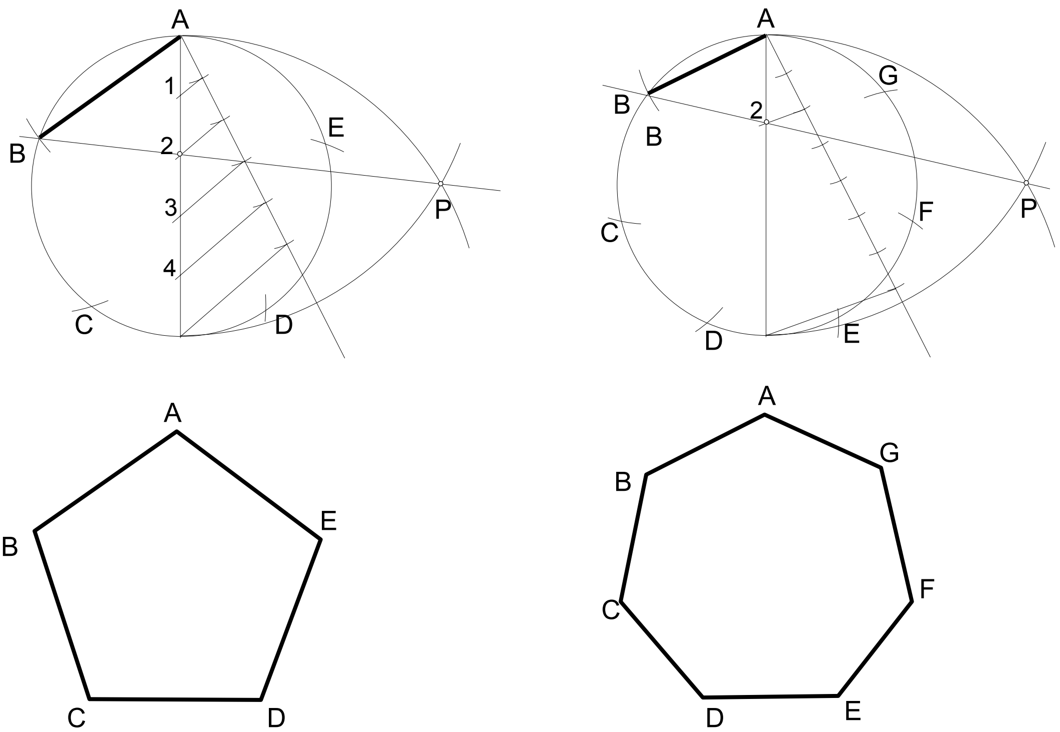
Embora possamos ter procedimentos diferentes para cada um dos polígonos regulares que se deseja construir, seja ele um triângulo, um quadrado, um pentágono ou hexágono e a assim por diante ou, a partir desses, polígonos com gênero igual ao dobro desses, descreveremos aqui um processo que pode atender a qualquer polígono regular. O processo é usado para dividir uma circunferência em arcos iguais, mas devemos entender que o processo dá apenas “aproximações” quando se trata de polígonos não-construtíveis.

V – DIVISÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM PARTES IGUAIS[1].

Dada a circunferência, traçamos seu diâmetro e dividimos este diâmetro no número de lados que se deseja para o polígono; com centro em cada um dos extremos do diâmetro e com abertura igual ao próprio diâmetro, determina-se a interseção P. A reta que passa pelos pontos P e 2, da divisão do diâmetro, corta a circunferência no ponto B.

O arco AB corresponde a divisão da circunferência no número de vezes pretendido. Então, a medida do segmento AB é o lado do polígono.

A seguir construímos um pentágono e um heptágono regulares.

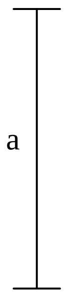


Observe que, dividindo o diâmetro em qualquer quantidade n de segmentos iguais, o lado do polígono de gênero n será definido pelo encontro da circunferência com a reta que passa pelo ponto P e pelo ponto 2.

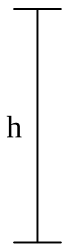
[1] Devemos entender que para alguns números esse procedimento nos dá um valor “aproximado” do lado do polígono inscrito.

EXERCÍCIOS:

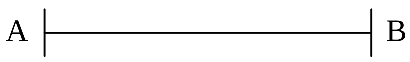
1) Construir o triângulo ABC de lado a.



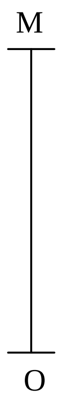
2) Desenhar o triângulo eqüilátero ABC conhecendo sua altura h.



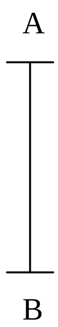
3) Construir o quadrado ABCD conhecendo o lado AB.



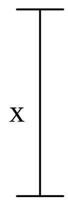
4) Desenhar o quadrado MNOP de diagonal MO.



5) Construa um pentágono regular de lado AB.



6) Construa um hexágono regular de lado x.



7) Dividir a circunferência (A ; 3,5 cm) em 5 partes congruentes.